

Bernoulli-Ketten Erwartungswert Standardabweichung

Bisher haben wir uns die Histogramme der Binomialverteilungen angeschaut und dabei untersucht, welchen Einfluss n und p auf die Verteilung haben.

Bei der Binomialverteilung kann man aber auch den Erwartungswert und die Standardabweichung berechnen.

Beispiel: Sei $n = 4$ und $p = 0.3$

Für jeden Treffer kann man eine Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$ berechnen.

Daher kann man auch einen Erwartungswert bestimmen.

Wie schon bekannt, berechnen wir den Erwartungswert einer Zufallsgröße, indem wir jeden Wert von k mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit multiplizieren:

X sei die Zufallsgröße mit der Wertemenge $0, \dots, k$. Dann bezeichnen wir folgende Größe als:

$$\mu = E(x) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + \dots + k \cdot P(X=k)$$

$$\mu = 0 \cdot 0,2401 + 1 \cdot 0,4116 + \dots + 4 \cdot 0,0081 = 1,2$$

Ebenso berechnen wir die **Varianz**: $V(X)$

$$V(X) = (0 - \mu)^2 \cdot P(X=0) + (1 - \mu)^2 \cdot P(X=1) + \dots + (k - \mu)^2 \cdot P(X=k)$$

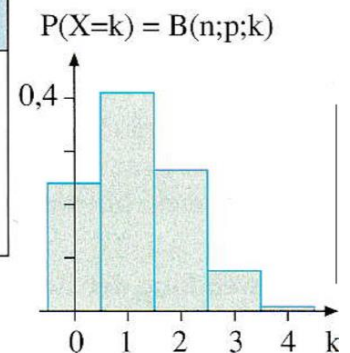
$$V(X) = (0 - 1,2)^2 \cdot 0,2401 + (1 - 1,2)^2 \cdot 0,4116 + \dots + (4 - 1,2)^2 \cdot 0,0081$$

$$V(X) = 0,84$$

Die **Standardabweichung** der Zufallsgröße X berechnen wir wie gewohnt, indem wir aus der Varianz die Wurzel ziehen:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0,92$$

k	P(X = k)
0	0,2401
1	0,4116
2	0,2646
3	0,0756
4	0,0081



Die Formeln sind recht aufwändig in ihrer Berechnung. Um einfachere Formeln zu erhalten, setzt man in die allgemeine Formel für $E(x)$ für $P(X=k)$ jeweils $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ ein, erhält man nach einigen Umformungen, die wir hier nicht nachvollziehen, die folgende Formel: $\mu = E(x) = n \cdot p$.

Ebenso erhalten wir für die Standardabweichung folgende Formel: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Aufgabe 1:

Berechne den Erwartungswert und die Varianz aus dem obigen Beispiel ($n = 4$; $p = 0.3$) mit den einfacheren Formeln und vergleiche.

$$\mu = E(x) = 4 \cdot 0,3 = 1,2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{4 \cdot 0,3 \cdot (1 - 0,3)} = \sqrt{4 \cdot 0,3 \cdot (0,7)} = 0,92$$

Aufgabe 2: Öffne Geogebra im Internet und untersuche bei Statistik Varianz und Erwartungswert, wenn man bei der Binomialverteilung n und p verändert.

Die Bedeutung von σ^2 bzw. σ verdeutlichen die folgenden Regeln.

σ -Regeln: Für jede binomialverteilte Zufallsgröße X mit der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ gilt:
 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,680$ (1 σ -Regel),
 $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,955$ (2 σ -Regel),
 $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$ (3 σ -Regel).
Die Näherung wird um so besser, je größer n ist. In der Regel verlangt man $\sigma > 3$.

Bei einer BERNOULLI-Kette der Länge n liegen somit ca. $\frac{2}{3}$ der Ergebnisse in dem Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ und fast alle Ergebnisse in dem Intervall $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$. Die Länge n der BERNOULLI-Kette spielt dabei keine Rolle, solange für die Standardabweichung $\sigma > 3$ gilt. Fig. 1 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 100$, $p = 0,5$ und $\sigma = 5$ sowie das 2σ -Intervall (rot) und das 3σ -Intervall (grün).

